3ª lez.
02/05/17

D(1)

TEOREMA 1

Se la FORMA (*) è ~~esatta~~ in un CAMPO CONNESSO A, detta $f(x,y)$ una qualsiasi sua primitiva e fissati comunque due punti $P', P'' \in A$, ~~∀~~ ~~per~~ ∀ curva regolare $\gamma \subset A$ congiungente P' e P'' si ha:

$$\int_{\gamma(P',P'')} X\,dx + Y\,dy = f(P'') - f(P')$$

∎

TEOREMA 2

CNS perché la FORMA (*) sia ESATTA è che ∀ CURVA CHIUSA $\gamma \subset A$ (REGOLARE) risulti:

$$\int_{\gamma} X\,dx + Y\,dy = 0$$

∎

T.S.

Riprendiamo la FORMA dell'es. precedente e calcoliamo

$$\int_{\gamma} 3x^2\,dx + xy^2\,dy$$

dove γ è la circonf. $C(0,0)$, $R=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

(D11)

$$\Rightarrow \int_\gamma \cdots = \int_0^{2\pi} \left[3\cos^2 t\,(-\sin t) + \cos t\,\sin^2 t\,(\cos t)\right] dt$$

$$= \ldots = \frac{\pi}{4} \neq 0.$$

Dunque $\int_\gamma$ sulla curva chiusa γ è $\neq 0$, e la CNS del TEOR 2 è violata $\Rightarrow$ ~~la~~ riotteniamo che la forma
$3x^2\,dx + x\,y^2\,dy$
NON È ESATTA

OSS

Dalla def. di FORMA DIFF. LIN. ESATTA abbiamo visto che:

$$\vec{F}(x,y) = \nabla f$$

CAMPO VETTORIALE

$X\,dx + Y\,dy$ FORMA ESATTA se $\exists f : df = X\,dx + Y\,dy = f_x\,dx + f_y\,dy$

$\simeq$

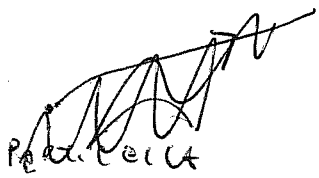
$\vec{F}$ È CONSERVATIVO se $\exists f : \vec{F} = \nabla f$

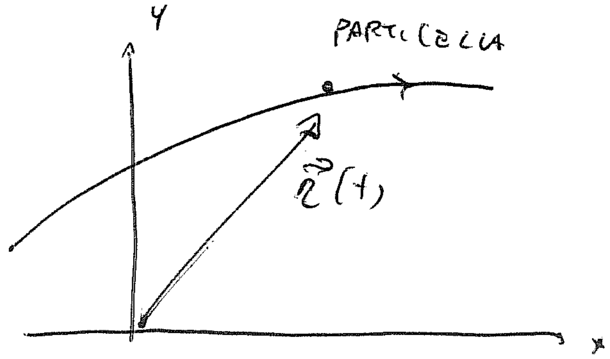
POTENZIALE

FORMA DIFF. ESATTA $\approx$ CAMPO VETT. CONSERVATIVO

OSS

Perché usiamo l'aggettivo "CONSERVATIVO"?





la particella si muove lungo la curva di eq. $\vec{r}(t)$, sotto l'azione di una forza $\vec{F} = \nabla f$

$\Rightarrow$ E_{TOT} (della particella): EN. TOT.

$$E_{TOT} = \underbrace{E_{CIN}}_{\text{energia cinetica}} + \underbrace{E_{POT}}_{\text{energia potenziale} = -f} = \frac{1}{2} \overset{\text{MASSA della particella}}{m} v^2 - f$$

NOTARE $v(t) = |\vec{r}\,'(t)| \Rightarrow v^2(t) = \vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}\,'(t)$

$$E_{CIN} = \frac{1}{2} m \, \vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

Differenziamo E_{TOT}:

$$dE_{TOT} = dE_{CIN} - df$$

con $$dE_{CIN} = \frac{1}{2} m \, d\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t) + \frac{1}{2} m \, \vec{r}'(t) \cdot d\vec{r}'(t)$$

$$= m \, \vec{r}'(t) \cdot \underbrace{d\vec{r}'}_{= \vec{r}''(t)\, dt}$$

$$= m \, \vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) \, dt$$

$$\Rightarrow dE_{TOT} = m \, \vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) \, dt - df$$

Ma $$\underset{\uparrow}{df} = f_x \, dx + f_y \, dy = \nabla f \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{= \vec{r}'(t)\, dt} = \nabla f \cdot \vec{r}'(t) \, dt$$

def. di FORMA ESATTA

$$\Rightarrow dE_{TOT} = m \, \vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) \, dt - \nabla f \cdot \vec{r}'(t) \, dt$$

$$= \vec{r}'(t) \cdot \underbrace{\left(m \, \vec{r}''(t)\right)}_{= \vec{F}} dt - \nabla f \cdot \vec{r}'(t) \, dt$$

($F = ma$ ~~le~~ legge della DINAMICA)

$$\Rightarrow dE_{TOT} = \Big[\vec{r}'(t) \cdot \vec{F} - \underset{\vec{F}}{\underset{\parallel}{\nabla f}} \cdot \vec{r}'(t)\Big] dt$$

$$= 0 \Rightarrow E_{TOT} = cost$$

NON VARIA!

~~**Def** Una FORMA DIFF $X\,dx + Y\,dy$ con $X, Y \in$~~ D13

Def $X, Y \in C^1(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (aperto) D14

Una forma diff $X\,dx + Y\,dy$ si DICE CHIUSA in A se $X_y = Y_x \quad \forall (x,y) \in A$.

TEOREMA 3

$X, Y \in C^1(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (aperto)

Se la FORMA $X\,dx + Y\,dy$ è ESATTA è anche CHIUSA in A.

ES Torniamo all'es precedente

$$3x^2\,dx + xy^2\,dy$$

$$X = 3x^2 \Rightarrow X_y = 0$$

$$Y = xy^2 \Rightarrow Y_x = y^2 \neq X_y$$

La FORMA NON È CHIUSA e quindi non è nemmeno esatta (dal Teorema 3).

Il "viceversa" del TEOREMA 3 NON È SEMPRE VERO!! (D15)

(N. S.)

$$-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$X_y = Y_x \Rightarrow$ FORMA CHIUSA su $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

Ma non è esatta! Infatti, se:

$$\gamma:\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi]$$

$$\Rightarrow \int_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{2\pi}\Big[-\sin t\,(-\sin t) + \cos t\,(\cos t)\Big]\,dt = 2\pi \neq 0.$$

$\Rightarrow$ essendo violate le CNS del Teorema 2, la FORMA NON È ESATTA

OSS

La risposta alla DOMANDA "la FORMA è esatta?" dipende anche dalla geometria dell'aperto A in cui la FORMA è definita.

N.S.

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{non è } C^1 \text{ in tutto } \mathbb{R}^2$$

Però, posto $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \}$, si ha che $f \in C^1(A)$.

Inoltre $f_x = X$, $f_y = Y$ (vedi es. precedente).

$\Rightarrow$ Pertanto, dalla def di FORMA ESATTA

$$-\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

è una forma diff. lin. esatta su A (ma non in $\mathbb{R}^2$)

Le questioni appena trattate possono essere poste anche in FORMA VETTORIALE, cosa che ~~[illegible]~~ presenta interesse nella FISICA

ROTORE DI UN CAMPO VETT. $\vec{F} = (X, Y, Z)$

$$\text{rot}\,\vec{F}\ \left(= \bar{\nabla} \times \vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

Se siamo nel piano $\Rightarrow$ $\vec{F} = (X, Y, 0)$

e quindi: $\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ X & Y & 0 \end{vmatrix}$

$$= \left(0, 0, Y_x - X_y\right)$$

Se la FORMA è chiusa $\Rightarrow$ $X_y = Y_x$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0}}$$

FORMA CHIUSA $\approx$ CAMPO IRROTAZIONALE

$X_y = Y_x$ $\qquad$ $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

con $\vec{F} = (X, Y)$

INS. SEMPLICEMENTE CONNESSI

Def l'aperto A si dice SEMPL. CONN. se:

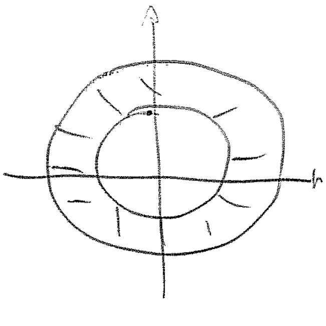
1) è connesso.

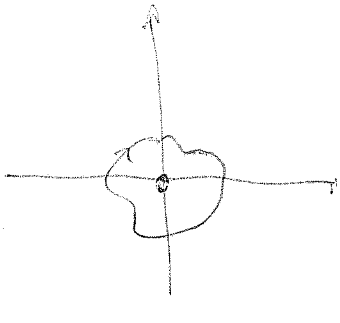
2) ogni curva semplice, chiusa e contenuta in A può essere ridotta mediante una deformazione continua ad un unico punto, senza mai uscire da A.

ESEMPI

- cerchi, ellissi sono SEMPL. CONN.
- piano o un cerchio privati di un punto (ogni insieme che presenta "un buco").

ES





$(x,y)\neq(0,0)$

- - -