FORME DIFFERENZIALI LINEARI (di $\mathbb{R}^2$)

$X = X(x,y)$, $\quad Y = Y(x,y)$ $\quad$ cont. in $E \subset \mathbb{R}^2$

def Forma diff. lineare:

$$dL = X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$$

~~[illegible]~~

FORME DIFF. LIN $\simeq$ CAMPI VETTORIALI

$$\vec{F}(x,y) = X(x,y)\,\vec{i} + Y(x,y)\,\vec{j}$$

$$= \begin{pmatrix} X(x,y) \\ Y(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad dL = \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{z} = (X, Y)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \dots$$

Infatti questa è la def. di "lavoro elementare compiuto da una forza $\vec{F}$ dovuto ad uno spostamento infinitesimo $d\vec{z} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$ del suo pto di applicazione".

(D2)

γ : curva regolare di eq. param:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

Sia γ contenuta in $E \subset \mathbb{R}^2$ (vus. def. della Forma lineare)

<u>Def</u>

Integrale ~~esteso~~ curvilineo della f. diff. lin. esteso alla curva γ :

$$\int_\gamma X(x,y)\, dx + Y(x,y)\, dy$$

$= ~~\int_a^b~~$

Ma $\begin{cases} dx = x'(t)\, dt \\ dy = y'(t)\, dt \end{cases} \Rightarrow \int_\gamma \cdots = \int_a^b [X(x(t), y(t))\, x'(t) +$

$+ Y(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt$

<u>OSS</u>

In questo modo riduciamo l'integrale curvilineo della forma diff. lineare (del campo vett.) ad un ordinario int. def. di una funz. cont. ☒

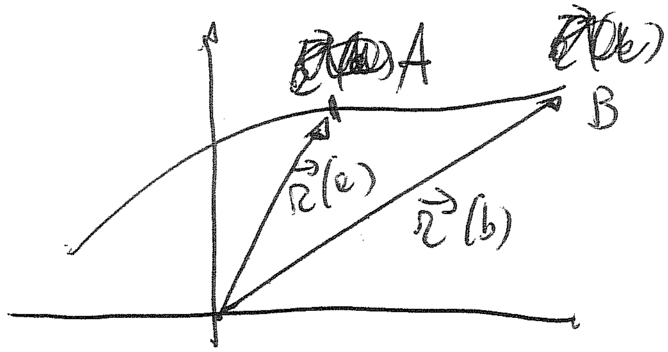
<u>OSS</u>

integrali curvilinei $\begin{cases} \text{- di funz. cont.} \\ \text{- di forme diff. lin. (campi vett.)} \end{cases}$ ☒

<u>Importante</u>

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ "RAGGIO VETT."

$t \in [a,b]$



$\vec{r}(a)$ individua il punto $A = (x(a), y(a))$

$\vec{r}(b)$ ———————— $B = (x(b), y(b))$

Se andiamo $A \mapsto B$ ovviamente $t \in [a,b]$

Ora se andiamo da $B \mapsto A$, allora $t \in [b,a]$

In tal caso:

$$\int_\gamma X\,dx + Y\,dy = \int_b^a \left[X(x(t),y(t))\,x'(t) + Y(x(t),y(t))\,y'(t) \right] dt$$

$$= -\int_a^b \cdots \, dt$$

$\Rightarrow$ l'integrale curvilineo cambia segno invertendo il verso di percorrenza.

TEOREMA

L'integrale curvilineo della f. diff. lin estesa ad un arco di curva γ NON DIPENDE ~~dalla~~ dalla rappr. parametrica adottata per γ (né dall'orientamento di γ); cambia segno invertendo il verso di percorrenza.

Quello che abbiamo appena visto ha una traduzione nella Fisica:

1 Poi

$$dL = \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$$

$$\Rightarrow \int_\gamma X\,dx + Y\,dy = \underbrace{\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{}$$

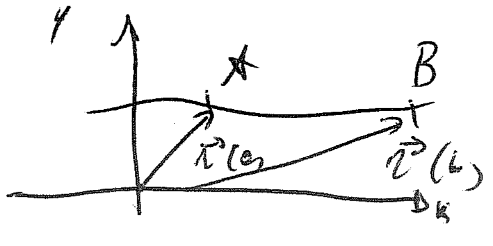
LAVORO DEL CAMPO (DELLA FORZA) $\vec{F}$ sul cammino γ

OSS

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$= \ldots\ldots$$ (vedi pag. precedenti) ⊠

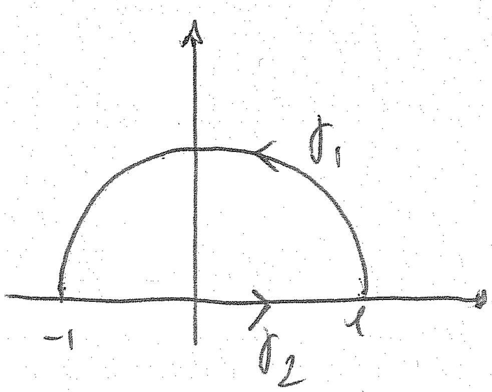
L'integrale rappresenta quindi il lavoro tot. compiuto da $\vec{F}$ per spostare il suo pto di applicazione da A a B lungo γ.



Se la curva γ è semplice e chiusa, si usa il simbolo:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$ CIRCUITAZIONE DEL CAMPO $\vec{F}$.

(M.S.)



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

~~Cosa chiede il Matematico : $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ Fisico~~

- Cosa chiede il ~~Matematico~~ Fisico:

$$\vec{F} = (x^2+y^2, -y^2) \Rightarrow \text{calcolare } \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Cosa chiede il Matematico:

calcolare $$\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx - y^2\,dy$$

(è la stessa cosa!)

$$\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx - y^2\,dy = \int_{\gamma_1} \cdots + \int_{\gamma_2} \cdots$$

D 7

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad t \in [-1, 1]$$

$$\Rightarrow \int_\gamma = \int_0^\pi \left[1 \cdot (-\sin t) - \sin^2 t \cdot (\cos t)\right] dt \; +$$

$$+ \int_{-1}^{1} \left(t^2 \cdot 1 + 0\right) dt = - \int_0^\pi \left(\sin t + \cos t \sin^2 t\right) dt$$

$$+ \int_{-1}^{1} t^2 \, dt = \cdots$$

FORMA DIFFERENZIALE LINEARE:

$$X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy \qquad (*)$$

con X, Y funzioni continue di x, y in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

<u>Def</u>

La FORMA $(*)$ è ESATTA se $\exists$ una funzione $f = f(x,y) \in C^1(A)$ il cui DIFFERENZIALE TOTALE

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy$$

coincide in A con la $(*)$, ovvero:

$$f_x = X, \quad f_y = Y \qquad \forall (x,y) \in A.$$

Questo significa che, posto:

$$\vec{F}(x,y) = \left(X(x,y), Y(x,y) \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}(x,y) = \nabla f(x,y)} \qquad \forall (x,y) \in A.$$

f viene detta PRIMITIVA della forma diff. lin. esatta.

OSS Non tutte le forme diff. sono esatte!

ES

$$3x^2\,dx + xy^2\,dy$$ NON È ESATTA.

Sarebbe esatta solo se esistesse una funzione f tale che:

$$df = 3x^2\,dx + xy^2\,dy$$

$$(= f_x\,dx + f_y\,dy)$$ dalla def. precedente

ovvero:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 \\ f_y = xy^2 \end{cases}$$

$$\int f_x \,dx = \int 3x^2\,dx \Rightarrow f(x,y) = x^3 + g(y).$$

sost. nella 2ª eq. ($f_y = xy^2$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \underbrace{g'(y) = xy^2}.$$

"assurdo": a sx c'è una funz. cost. in x, a dx c'è una funz. che dipende da x e y.