OSS

Nell'esempio precedente siamo passati da:

SETTIMA LEZ. (11/04/17)

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{con } |\vec{r}\,'(\theta)| = R$$

e $$\vec{r}(s) = \begin{pmatrix} R\cos s/R \\ R\sin s/R \end{pmatrix} \quad \text{con } |\vec{r}\,'(s)| = \dots = 1$$

Questo è ~~del~~ vero in generale! Infatti, se $\vec{r}(s)$ è ~~una~~ la parametriz. di una curva regolare mediante ascissa curvilinea $s \Rightarrow \underbrace{|\vec{r}\,'(s)| = 1 \quad !}$

DIM

$$\vec{r}\,'(s) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt}$$

Ma $$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{r}\,'(\tau)|\, d\tau \Rightarrow \frac{ds}{dt} = |\vec{r}\,'(t)| := v(t)$$

$$\Rightarrow \vec{r}\,'(s) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{v(t)} \Rightarrow |\vec{r}\,'(s)| = \frac{|\vec{r}\,'(t)|}{|v(t)|}$$

$$= \frac{\cancel{v(t)}}{\cancel{v(t)}} = 1 \qquad \underline{\text{c.v.d.}}$$

~~from the department; thanks to them this~~ possibility has become a certainty.

C 16

OSS s: ascisse curvilinee

- $|\vec{r}\,'(s)| = 1$ $\forall s$ e per qualsiasi curva regolare

- $\vec{T}(s) = \dfrac{\vec{r}\,'(s)}{|\vec{r}\,'(s)|} = \vec{r}\,'(s)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{T}(s) = \vec{r}\,'(s)}$$

Inoltre, se $|\vec{r}\,'(s)| = 1 \Rightarrow \vec{r}\,'(s) \cdot \vec{r}\,'(s) = 1$

$\dfrac{d}{ds}$ a DX e SX $\Rightarrow \vec{r}\,'(s) \cdot \vec{r}\,''(s) + \vec{r}\,''(s) \cdot \vec{r}\,'(s) = 0$

$$\Rightarrow 2\, \vec{r}\,'(s) \cdot \vec{r}\,''(s) = 0 \Rightarrow \underline{\vec{r}\,'(s) \cdot \vec{r}\,''(s) = 0}$$

OSS s: ascisse curvilinee

$\vec{r}\,'(s) \cdot \vec{r}\,''(s) = 0 \Rightarrow$

1. Punto di vista cinematico: vel $\vec{r}\,'(s)$ e accel. $\vec{r}\,''(s)$ SONO ORTOG.

2. Punto di vista geometrico: se $\vec{r}\,'(s) = \vec{T}(s)$ allora: $\vec{T}\,'(s) \cdot \vec{T}(s) = 0 \Rightarrow \vec{T}\,'(s) \perp \vec{T}(s)$

Questo giustifica la seguente def.

Def

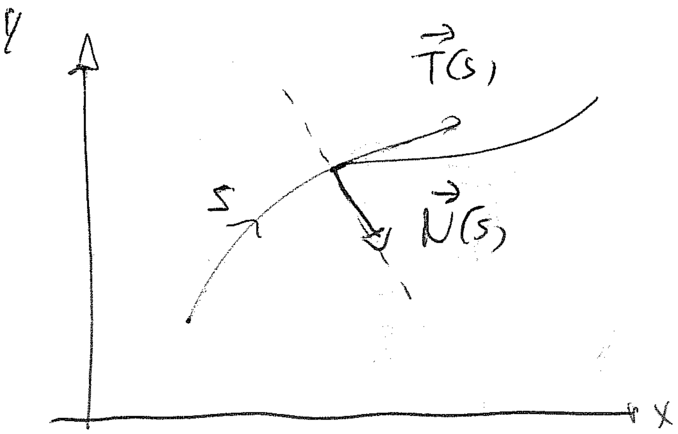
$$\vec{N}(s) = \operatorname{vers}\left(\vec{T}'(s)\right) = \frac{\vec{T}'(s)}{|\vec{T}'(s)|}$$

VERSORE NORMALE

s: ascissa curvilinea

definito nei punti in cui $\vec{T}'(s) \neq \vec{0}$

$\left(|\vec{T}'(s)| \neq 0\right)$. ■



Oss Si può dimostrare che:

$$\vec{N}(t) = \operatorname{vers}\left(\vec{T}'(t)\right) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

Fisica

(C 18)

$$\vec{r}'(t) = v(t)\,\vec{T}(t)$$

$$\Rightarrow \vec{r}''(t) = v'(t)\,\vec{T}(t) + v(t)\,\vec{T}'(t)$$

$$\vec{r}''(t) = \underbrace{v'(t)\,\vec{T}(t)}_{\text{accel. tangenziale}} + \underbrace{v(t)\,|\vec{T}'(t)|\,\vec{N}(t)}_{\text{accel. normale}}$$

$$\boxed{\text{INTEG. CURVILINEO DI UNA FUNZIONE}}$$

Ricordo che: 1) con $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ intendo l'applicazione che def la curva $\to$ $\varphi: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in I$

2) che con $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ indico il "RAGGIO VETTORE" che mi serve per disegnare la curva

3) DENOTO la curva REGOLARE con la lettera γ.

4) il "sostegno" Γ della curva è def come $\varphi(I)$, che è un sottoinsieme del piano ... per es $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ ha per sostegno la circ di eq. $x^2+y^2=1$.

Inoltre, denoto:

$$f : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{continua su } \Gamma$$

Quindi una funzione $z = f(x,y)$!

<u>Def</u> Integrale curvilineo di una funz.

$$\int_\gamma f \, ds \doteq \int_a^b f(\vec{r}(t)) \, |\vec{r}\,'(t)| \, dt$$

NON È LA s

dell'ascissa curvilinea!

ovvero:

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt$$

<u>Oss</u>

L'integrale $\int_\gamma f \, ds$ è invariante per

parametrizzazioni equivalenti e per cambiamenti

di orientaz. su γ.

Significato geometrico di $\int_\gamma f \, ds$

C20

Se s è proprio l'ascissa curvilinea,

allora:

$$\cancel{\int_a^b f(\vec{r}(t)) \, |\vec{r}'(t)| \, dt}$$

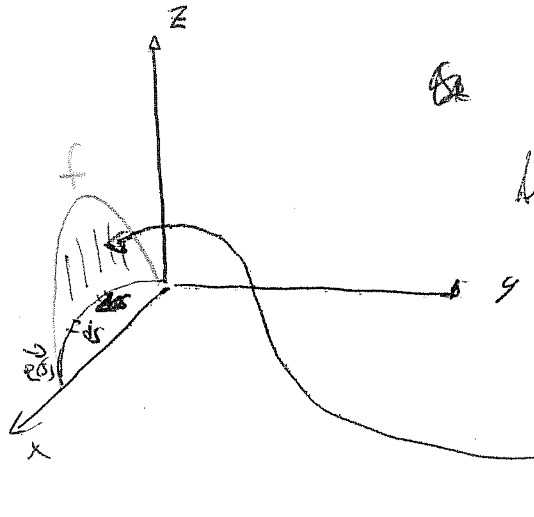
$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{r}'(\tau)| \, d\tau \Rightarrow \frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)|$$

$$\Rightarrow ds = |\vec{r}'(s)| \, dt \Rightarrow \int_a^b f(\vec{r}(t)) \, |\vec{r}'(t)| \, dt =$$

$$= \int_0^L f(\vec{r}(s)) \, ds$$

~~È vero che $\vec{r}(s) = (x(s), y(s))$ quindi f è f~~

f è funz. di 2 variabili ($x(s)$ e $y(s)$) ~~ma~~ queste, a loro volte, sono funzioni di 1 sola var (s).



$\Rightarrow f = f(s)$

Allora se $f \geq 0$,

$$\int_0^L f(s) \, ds$$

è un'area!

es

C21

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = y\sqrt{x^2 - 4(x-2)}$

curva

$$\gamma: \begin{cases} x = e^t + 2 \\ y = 2t+1 \end{cases} \qquad t \in [-1,1]$$

$$\int_\gamma f \, ds = \, ?$$

$$f(x(t), y(t)) = (2t+1)\sqrt{(e^t+2)^2 - 4e^t}$$

$$= (2t+1)\sqrt{e^{2t} + 4 + \cancel{4e^t} - \cancel{4e^t}}$$

$$= (2t+1)\sqrt{e^{2t}+4}$$

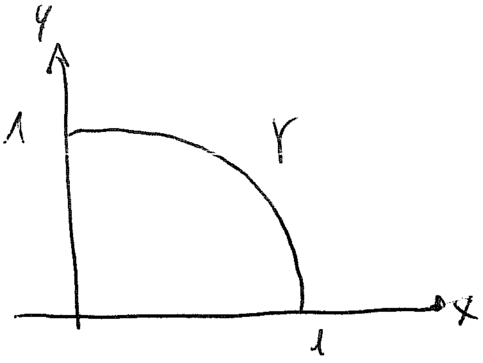
$x' = e^t$

$y' = 2$ $\Rightarrow \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{e^{2t}+4}$

$$\Rightarrow \int_\gamma f \, ds = \int_{-1}^{1} (2t+1)(e^{2t}+4)\, dt = \dots$$

x casa

(4.5.)



$$\int_\gamma x^2 y \, ds \quad ?$$

(C22)

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi/2] \quad \ldots \quad \text{X CASA}$$

PROPRIETÀ DEGLI INT. CURVILINEI DI FUNZIONI

$f, g : \Gamma \to \mathbb{R}$ continue

γ curva regolare con sost. Γ

$\Rightarrow$ (i) $\displaystyle\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\, ds = \alpha \int_\gamma f \, ds + \beta \int_\gamma g \, ds$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ii) $\displaystyle\int_\gamma f \, ds \le \int_\gamma g \, ds$ se $f \le g$ su Γ

(iii) $\int_\gamma f\,ds = \int_{\gamma_1} f\,ds + \int_{\gamma_2} f\,ds$ C23

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1 : [a, c] \to \mathbb{R}^2$ $(a < c < b)$

$\gamma_2 : [c, b] \to \mathbb{R}^2$