[65] Cazzani, A., Wagner, N., Ruge, P., Stochino, F., 2016. Continuous transition between traveling mass and traveling oscillator using mixed variables. International Journal of Non-Linear Mechanics, 80, 82-95. 12

[66] Cazzani, A. and Ruge, P., 2014. Symmetric matrix-valued transmitting boundary formulation in the time-domain for soil-structure interaction problems. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 57, 104–120. 12

[67] Cazzani, A., Ruge, P., 2016. Stabilization by deflation for sparse dynamical systems without loss of sparsity. Mechanical System and Signal Processing, 70-71, 664-681. 12

[68] A. Bilotta, G. Formica, and E. Turco. Performance of a high-continuity finite element in three-dimensional elasticity. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, 26(9):1155-1175, 2010. 12

[69] A. Cazzani, M. Malagù, E. Turco, and F. Stochino. Constitutive models for strongly curved beams in the frame of isogeometric analysis. Mathematics and Mechanics of Solids, 21(2):182–209, 2016. 12

X CASA

Sesta lezione

04/04/17

18 hrs

$$\gamma: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad a, b > 0 \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Calcolare la lunghezza dell'ellisse

1) Ci riuscite?

2) Fare una ricerca su questo integrale.

~~LUNGHEZZA DI UN GRAFICO~~

$$\cancel{\varphi : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]}$$

LUNGHEZZA DI UN GRAFICO

$y = f(x)$ [illegible] per $x \in [a,b]$

$$\varphi : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b] \Rightarrow \vec{r}(t) = (t, f(t))$$

$$\vec{r}\,'(t) = (1, f'(t)) \neq (0,0) \qquad \forall t \in [a,b]$$

φ è regolare $\Leftrightarrow$ $f \in C^1([a,b])$

$$\Rightarrow \quad L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt$$

~~es) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva:~~

$$\cancel{\varphi : \begin{cases} x = 2t \\ y = e^t + e^{-t} \end{cases} \quad t \in [0,1]}$$

3

~~**Oss**~~

~~In questo modo riduciamo l'integrale curvilineo ad un ~~integrale~~ "ordinario" (int. def.) di una variab. reale~~

~~**Oss**~~

~~Integrali curvilinei: di funzioni; di forme diff. lineari (campi vettoriali)~~

Es (Gibus)

Calcolare la lunghezza dell'arco di curva:

$$y = e^{x/2} + e^{-x/2} \qquad x \in [0,1]$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = e^{t/2} + e^{-t/2} \end{cases} \quad t \in [0,1] \Rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{(e^{t/2} - e^{-t/2})^2}{4}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{4 + e^{t} + e^{-t} - 2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2 + e^{t} + e^{-t}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{(e^{t/2} + e^{-t/2})^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (e^{t/2} + e^{-t/2})\, dt$$

$$= \dots$$

(P10)

$$\cancel{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{|\vec{r}\,'(t)|^2 = 4 + (e^t - e^{-t})^2 = 4 + e^{2t} + e^{-2t} - 2}$$

$$\cancel{= 2 + e^{2t} + e^{-2t}}$$

$$\cancel{= (e^t + e^{-t})^2 \Rightarrow \boxed{|\vec{r}\,'(t)| = e^t + e^{-t}}}$$

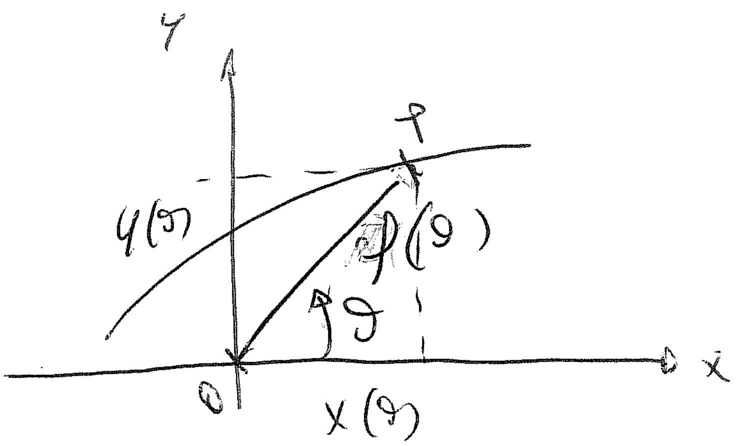
$$\cancel{L(\gamma) = \int_0^1 (e^t + e^{-t})\, dt = \left[e^t - e^{-t}\right]_0^1 = \ldots}$$

DSS ~~...~~ Relaz. tra funzioni e curve ....

LUNGHEZZA DI UNA CURVA PIANA IN FORMA POLARE

$$\rho = f(\vartheta) \geq 0 \qquad \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$$

è un raggio e quindi $\rho \geq 0$



$$\begin{cases} x(\vartheta) = \rho(\vartheta)\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = \rho(\vartheta)\sin\vartheta \end{cases} \qquad \vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$$

$$= \begin{cases} x = f(\vartheta)\cos\vartheta \\ y = f(\vartheta)\sin\vartheta \end{cases}$$

C11

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} f(\theta)\cos\theta \\ f(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'(\theta) = \begin{pmatrix} f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta \\ f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

$$\varphi \in C^1(I) \iff f \in C^1(I)$$

$$|\vec{r}'(\theta)|^2 = f'^2\cos^2\theta \cancel{-2ff'\cos\theta\sin\theta} + f^2\sin^2\theta$$
$$+ f'^2\sin^2\theta + f^2\cos^2\theta \cancel{+2ff'\sin\theta\cos\theta}$$
$$= [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2$$

$$|\vec{r}'(\theta)| \neq 0 \iff \boxed{f(\theta) \neq 0 \text{ o } f'(\theta) \neq 0} \quad \forall \theta \in I$$

$$\varphi \in C^1(I) \iff f \in C^1(I), \quad f(\theta) \neq 0 \text{ o } f'(\theta) \neq 0 \quad \forall \theta \in I$$

$$\Rightarrow L(\varphi) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}\, d\theta$$

ES

C12

SPIRALE LOGARITMICA

$$\rho(\vartheta) = A\, e^{\vartheta}, \quad A \in \mathbb{R}^+, \ \vartheta \in [0, \pi]$$

~~LAVORARE~~. Calcolare la lungh. della curva polare.

$$\begin{cases} x(\vartheta) = A e^{\vartheta} \cos\vartheta \\ y(\vartheta) = A e^{\vartheta} \sin\vartheta \end{cases} \qquad f(\vartheta) = A e^{\vartheta} \neq 0 \quad \forall \vartheta$$

$$f'(\vartheta) = A\, e^{\vartheta} \neq 0 \quad \forall \vartheta$$

inoltre $f \in C^1(I) \Rightarrow$ φ regolare

$$L(\varphi) = \int_0^{\pi} \sqrt{A^2 e^{2\vartheta} + A^2 e^{2\vartheta}}\, d\vartheta = A \int_0^{\pi} \sqrt{2}\, e^{\vartheta}\, d\vartheta$$

$$= A\sqrt{2} \int_0^{\pi} e^{\vartheta}\, d\vartheta = \dots$$

CAMBIAM. DI PARAMETRIZ.

C13

$$\begin{cases} x = R\cos(-\vartheta) \\ y = R\sin(-\vartheta) \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

cambio di orientazione

Invece:

$$\begin{cases} x = R\cos\vartheta \\ y = R\sin\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi] \quad (*) \qquad / \qquad \begin{cases} x = R\cos 2u \\ y = R\sin 2u \\ u \in [0, \pi] \end{cases} \quad (**)$$

Sono due parametriz. equivalenti

Importante

La lunghezza di un arco di curva regolare non cambia se le parametrizzazioni sono equivalenti.

Per es.: $(*)$ e $(**)$ hanno stessa lunghezza $(= 2\pi R)$

(C 14)

(Def) ~~Def~~

φ [illegible]: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [a,b]$

Def

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}\,'(\tau)|\, d\tau = \int_a^t \sqrt{\dots}\, d\tau$$

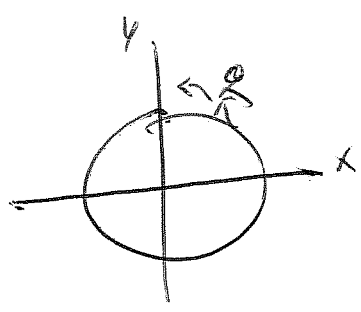
ascissa curvilinea.

(ES) $\varphi: \begin{cases} x = R\cos\vartheta \\ y = R\sin\vartheta \end{cases}$ calcolare $s(\vartheta)$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$

$$s(\vartheta) = \int_0^\vartheta |\vec{r}\,'(\tau)|\, d\tau = R\vartheta \Rightarrow s \in [0, 2\pi R]$$

Si può allora riparametrizzare la curva

$$\vartheta(s) = \frac{s}{R} \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos s/R \\ y = R\sin s/R \end{cases} \quad s \in [0, 2\pi R]$$



importante! Mi dice la posizione occupata sulla curva da [illegible] non al variare di ϑ ma della distanza percorsa.