TEOR. 4

10a lezione
09/05/17

D19

$X, Y \in C^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (aperto sempl. connesso)

Una forma diff ~~chiusa~~ $X\,dx + Y\,dy$ CHIUSA ~~in A~~ è anche esatta in A.

NB: PER CASA ESEMPIO presente sul M.S.

Con i prossimi esempi vedremo come applicare i TEOREMI presentati in precedenza e una "tecnica" per trovare la primitiva di una F SROSS...

ES Data la FORMA DIFF.

$$\omega = \left(1 + \frac{y^3}{x^2}\right) dx + \left(y - 3\frac{y^2}{x}\right) dy$$

determinare: 1) ins. di def. di ω; 2) ins. di esattezza di ω; 3) primitiva che in $(-1,3)$ assume valore 4.
4) Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove γ è la circ. di $r = 1$, $C(2,0)$

1) $X = 1 + \dfrac{y^3}{x^2}$

$x \neq 0 \Rightarrow D = \{(x,y) \mid x \neq 0\}$

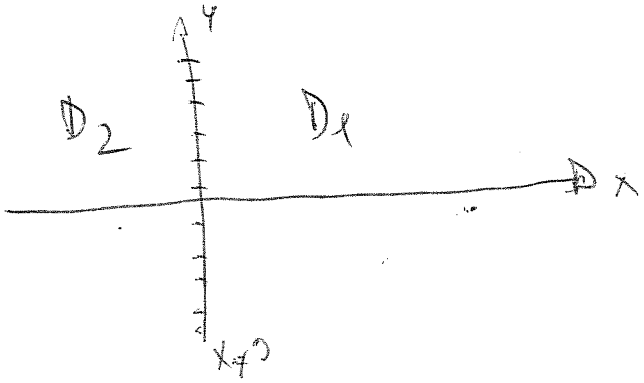
$Y = y - \dfrac{3y^2}{x}$

D20

2) $X_y = \frac{3y^2}{x^2} = Y_x$ ω è CHIUSA.

$D = D_1 \cup D_2$ con $D_1 = \{(x,y) \mid x > 0\}$.
$D_2 = \{(x,y) \mid x < 0\}$.

D_1 e D_2 sono sempl. connessi.



Per il teorema 4. $\Rightarrow$ ω è esatta in D_1 e in D_2.

3) PRIMITIVA

$$df = X\,dx + Y\,dy$$
$$= f_x\,dx + f_y\,dy$$

$\Rightarrow f_x = X \Rightarrow f(x,y) = \int X\,dx$

integro in x e la cost è in y.

$$= \int \left(1 + \frac{y^3}{x^2}\right) dx + g(y)$$

in D_1 (e D_2).

$$f(x,y) = x + y^3\left(-\frac{1}{x}\right) + g(y)$$

$$= x - \frac{y^3}{x} + g(y)$$

Imponiamo $\quad f_y = y \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[x - \frac{y^3}{x} + g(y)\right] =$

$$= y - \frac{3y^2}{x}$$

$$\Rightarrow -\cancel{\frac{3y^2}{x}} + g'(y) = y - \cancel{\frac{3y^2}{x}}$$

$$\Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{f(x,y) = x - \frac{y^3}{x} + \frac{y^2}{2} + C}$$

in D_1 e in D_2.

$(-1,3) \in D_2 \Rightarrow$ cerchiamo una primitiva di f in D_2.

$$f(-1,3) = 4 \Rightarrow \quad 4 = -1 + \frac{27}{4} + \frac{9}{2} + C$$

$$\Rightarrow \ldots$$

5) Applicare Teorema 2

ES

D22

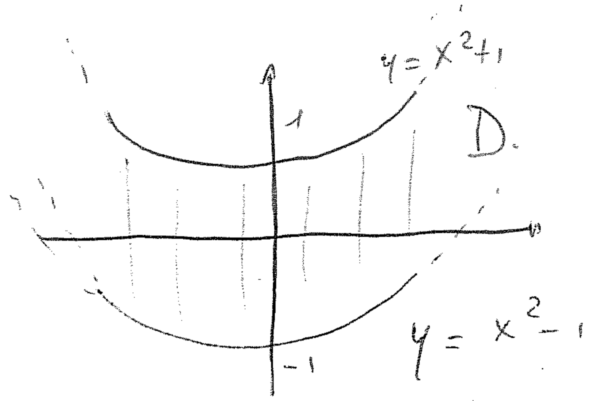
$$\omega = \frac{2x\,dx - dy}{\sqrt{1-(y-x^2)^2}}$$

determinare: 1) ins di def. di ω; 2) ins. di esattezza di ω

3) primitiva che in $(0, 1/\sqrt{2})$ vale 0.

1) $1-(y-x^2)^2 > 0 \iff -1 < y - x^2 < 1$.

$x^2 - 1 < y < x^2 + 1$



$D := \{(x,y) \mid x^2-1 < y < x^2+1\}$.

2) D è sempl. connesso, quindi per il teorema 4

ω è esatta in D. $\Longleftarrow$ $X_y = Y_x = \dfrac{2x(y-x^2)}{\sqrt{[\dots]^3}}$

3) $df = f_x\,dx + f_y\,dy$.

Poniamo $f_y = Y$.

D23

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \int Y \, dy + g(x)$$

integro in y e la cost è in x.

$$f(x,y) = - \int \frac{1}{\sqrt{1-(y-x^2)}} \, dy + g(x)$$

$$= - \arcsin(y - x^2) + g(x)$$

Imponiamo $\dfrac{\partial f}{\partial x} := X \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}\left[-\arcsin(y-x^2) + g(x)\right]$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1-(y-x^2)^2}}$$

$$\Rightarrow + \frac{+2x}{\sqrt{1-(y-x^2)^2}} + g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-(y-x^2)^2}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{g(x) = c}$$

D 24

$\Rightarrow \quad f(x,y) = -\arcsin(4-x^2) + C$.

$f(0, 1/\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \quad 0 = -\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + C$.

$C = \frac{\pi}{4}$

(E1)

FORMULE DI GAUSS-GREEN. TEOR. DELLA DIVERG. FORMULA DI STOKES

Consideriamo, per es., un DOMINIO NORMALE RISP. all'asse x:

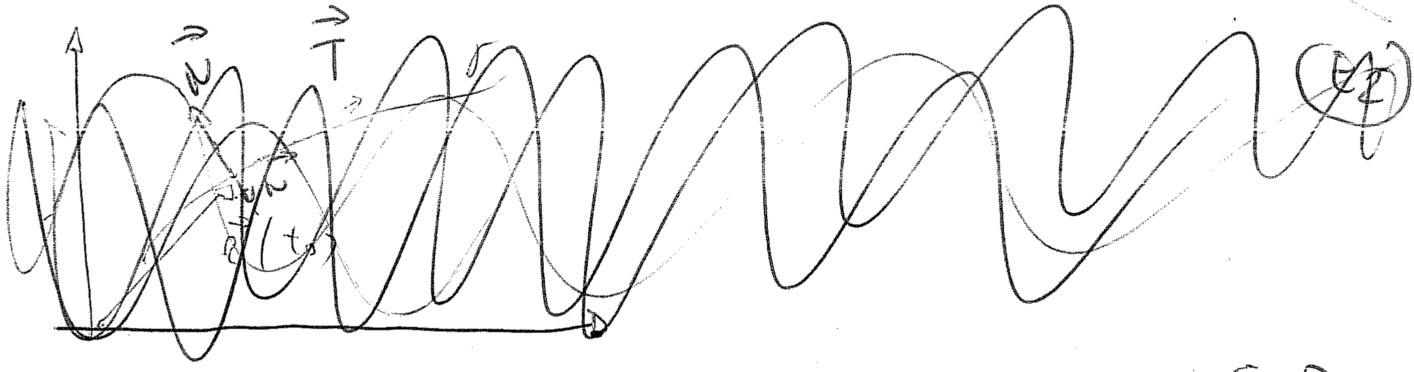
$$D = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \mid \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

D è REGOLARE se $\alpha, \beta \in C^1([a,b])$ e se $\alpha(x) < \beta(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

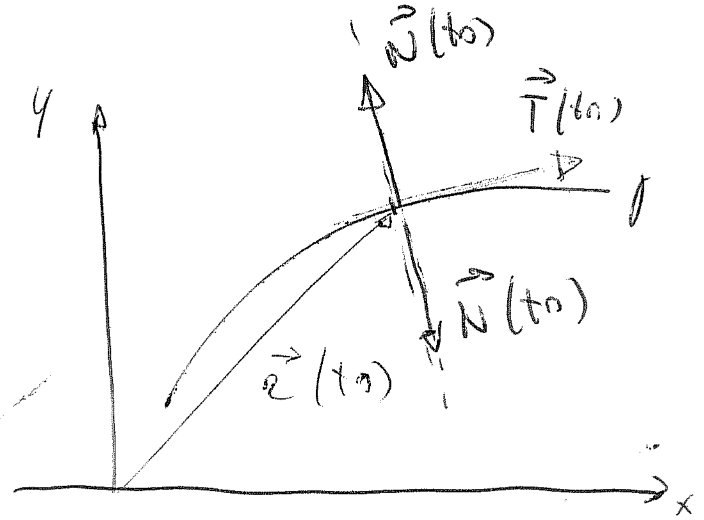
OSS

In generale, un DOMINIO REGOLARE D è per def unione di un numero finito di domini regolari, a due a due privi di punti interni in comune.

$\Rightarrow$ In tal caso la frontiera ∂D è UNIONE di un numero finito di curve regolari a tratti. (Pertanto essa ammette versore tangente $\vec{T}$ in tutti i suoi punti, tranne al più un numero finito ... e con $\vec{T}$ c'è anche $\vec{N}$, vers. NORMALE)



E 2



Per evitare l'ambiguità nel verso di $\vec{N}$

<u>Def</u>

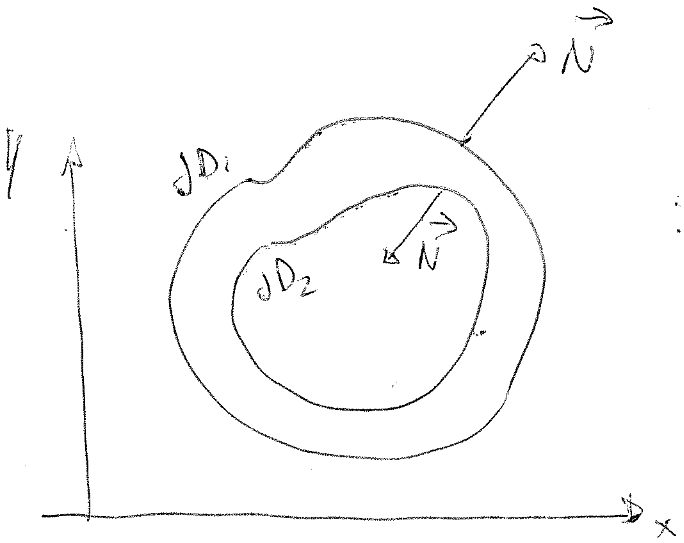
Se $t_0 \in (a,b)$, si def. versore normale alla curva γ nel punto individuato da $\vec{r}(t_0)$, il versore $\vec{N}(t_0)$ che si ottiene ruotando il versore tangente $\vec{T}(t_0)$ di $\pi/2$ in senso ORARIO

(Quindi il verso "corretto" di $\vec{N}$, nel disegno precedente, è quello verso il basso).

Convenzione

Si conviene di orientare la frontiera di D in modo che $\vec{N}$ risulti in ogni punto esterno a ∂D. ■

es

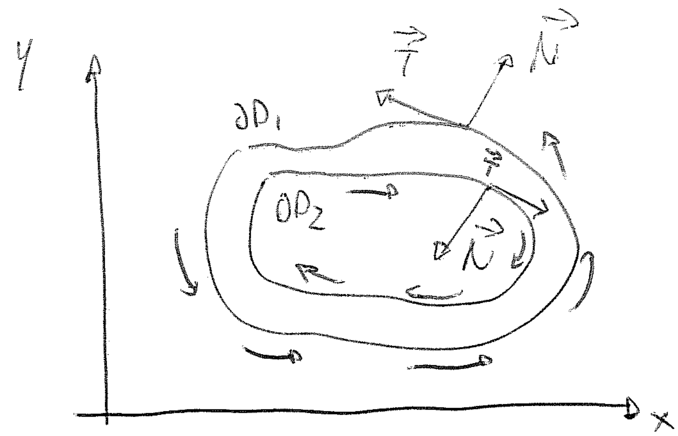


$\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2$

step 1

Si fissano prima i vett. $\vec{N}$ (esterni a ∂D)

step 2 poi si disegnano i vett. $\vec{T}$, in modo tale che, ruotati di $\frac{\pi}{2}$ (in senso orario), si ottengano i vett. $\vec{N}$ fissati nello step 1.



ORIENTAMENTO POSITIVO

$(+\partial D)$